

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Άσκηση 1. Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz (σε όλο το $\mathbb{R}$) και έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Να δείξετε ότι η λύση του ΠΑΤ

$$\begin{cases} y' = g(y), & y(t_0) = y_0 \\ z' = f(y)z, & z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

είναι καθολική.

Άσκηση 2. Μετατρέψτε τις παρακάτω εξισώσεις/συστήματα σε συστήματα πρώτης τάξης:

(i) $y''' + (y'')^2 + e^t y y' - 2(\sin t)y^4 = 0$

(ii) $y^{(4)} = y^2(y')^2 + y'''y'' - e^{2t}y^{(4)}$

(iii)

$$\begin{cases} y^{(4)} + (z'')^2 y^3 - t^{10} y'' z + z^3 (y')^4 = 0 \\ z''' = (y''')^2 - e^{2t} (z')^2 + y'' z^5 \end{cases}$$

Άσκηση 3. Υπολογίστε την ορίζουσα Wronski των:

(i) t^a, t^b, t^c , όπου $t > 0$ και $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(ii) $t^m \sin \log t^n, t^m \cos \log t^n$, όπου $t > 0$ και $m, n \in \mathbb{N}$.

Είναι οι συναρτήσεις σε κάθε περίπτωση γραμμικά ανεξάρτητες;

Άσκηση 4. Να βρεθεί η γενική λύση των εξισώσεων:

(i) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^t - te^{2t}$

(ii) $y'' - 3y' + 2y = 14 \sin 2t - 18 \cos 2t$

Άσκηση 5. Να λυθούν τα ΠΑΤ:

(i) $y''' = y, y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$

(ii) $y''' + y'' = t + e^{-t}, y(0) = y''(0) = 1, y'(0) = 0$

Άσκηση 6. Υπολογίστε τα εκθετικά e^{At}, e^{Bt} για

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ισχύει $e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$;

Άσκηση 7. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος $\vec{y}' = A\vec{y}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε την ορίζουσα Wronski μιας βάσης λύσεων.

Άσκηση 8. Να γραφτεί το σύστημα

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_3 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = y_1 - y_2 - y_3 \end{cases}$$

σε μορφή πινάκων και να βρεθεί η γενική του λύση.

Άσκηση 9. Να λυθεί το ΠΑΤ:

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Υποδείξεις

1 Από την άσκηση 7 του φυλλαδίου 1, έχουμε ότι η λύση της πρώτης εξίσωσης είναι καθολική, δηλ. το πεδίο ορισμού της $y(t)$ είναι το $\mathbb{R}$. Επομένως και η σύνθεση $f(y)$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι η δεύτερη εξίσωση είναι γραμμική ως προς z και ότι η λύση έχει τύπο $z(t) = z_0 e^{\int_{t_0}^t f(y) ds}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα η λύση (y, z) του συστήματος είναι καθολική.

2 Θέτουμε (i) $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'',$ (ii) $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', y_4 = y''',$ (iii) $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', y_4 = y''', y_5 = z, y_6 = z', y_7 = z''$ και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_3^2 - e^t y_1 y_2 + 2(\sin t) y_1^4 \end{cases} & \text{(ii)} \quad & \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = (1 + e^{2t})^{-1} (y_1^2 y_2^2 + y_4 y_3) \end{cases} \\ & & \text{(iii)} \quad & \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -y_7^2 y_1^3 + t^{10} y_3 y_5 - y_5^3 y_2^4 \\ y_5' = y_6 \\ y_6' = y_7 \\ y_7' = y_4^2 - e^{2t} y_6^2 + y_3 y_5^5 \end{cases} \end{aligned}$$

3 Οι ορίζουσες Wronski ισούνται: (i)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} t^a & t^b & t^c \\ at^{a-1} & bt^{b-1} & ct^{c-1} \\ a(a-1)t^{a-2} & b(b-1)t^{b-2} & c(c-1)t^{c-2} \end{vmatrix} \\ &= t^a [bc(c-1) - bc(b-1)] t^{b+c-3} - t^b [ac(c-1) - ac(a-1)] t^{a+c-3} + t^c [ab(b-1) - ab(a-1)] t^{a+b-3} \\ &= t^{a+b+c-3} [bc(c-b) - ac(c-a) + ab(b-a)] \\ &= t^{a+b+c-3} [bc(c-a+a-b) - ac(c-a) + ab(b-a)] \\ &= t^{a+b+c-3} [bc(c-a) + bc(a-b) - ac(c-a) + ab(b-a)] \\ &= t^{a+b+c-3} [(bc-ac)(c-a) + (bc-ab)(a-b)] \\ &= t^{a+b+c-3} [c(b-a)(c-a) + b(c-a)(a-b)] \\ &= t^{a+b+c-3} (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

και (ii)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} t^m \sin \log t^n & t^m \cos \log t^n \\ mt^{m-1} \sin \log t^n + nt^{m-1} \cos \log t^n & mt^{m-1} \cos \log t^n - nt^{m-1} \sin \log t^n \end{vmatrix} \\ &= t^m \sin \log t^n (mt^{m-1} \cos \log t^n - nt^{m-1} \sin \log t^n) - t^m \cos \log t^n (mt^{m-1} \sin \log t^n + nt^{m-1} \cos \log t^n) \\ &= -nt^{2m-1} [(\sin \log t^n)^2 + (\cos \log t^n)^2] \\ &= -nt^{m-1} \end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες συναρτήσεις σε κάθε περίπτωση είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνον αν η ορίζουσα Wronski είναι μη μηδενική για κάθε $t > 0$ (το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων). Άρα στην (i) πρέπει $a \neq b \neq c \neq a$ για να έχουμε ανεξαρτησία και στην (ii) ισχύει για κάθε θετικούς φυσικούς n, m .

4 (i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γράφεται $r^4 - 5r^2 + 4 = (r^2 - 1)(r^2 - 4)$, άρα οι ρίζες είναι $r = 1, -1, 2, -2$. Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης επομένως είναι $y_{\text{gen}} = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t}$. Μένει να βρούμε μια ειδική λύση. Σπάμε το πρόβλημα στην έρευνα ειδικών

λύσεων με δεξιά μέλη e^t και $-te^{2t}$. Το άθροισμα τους μας δίνει την ειδική λύση που αναζητούμε λόγω γραμμικότητας της εξίσωσης. Εφόσον οι e^t, e^{2t} είναι λύσεις της ομογενούς, η μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών μας λέει ότι οι ειδικές λύσεις για τα επιμέρους δεξιά μέλη είναι της μορφής: $y_1 = ate^t$,

$$(ate^t)^{(4)} - 5(ate^t)'' + 4(ate^t) = a[te^t + 4e^t - 5(te^t + 2e^t) + 4te^t] = -6ae^t \Rightarrow a = -\frac{1}{6}$$

και $y_2 = (bt + ct^2)e^{2t}$,

$$\begin{aligned} & [(bt + ct^2)e^{2t}]^{(4)} - 5[(bt + ct^2)e^{2t}]'' + 4[(bt + ct^2)e^{2t}] \\ &= b[32e^{2t} - 20e^{2t}] + c[48e^{2t} + 64te^{2t} - 5(2e^{2t} + 8t^2e^{2t})] \\ &= (38c + 12b)e^{2t} + 24cte^{2t} \\ &\Rightarrow c = -\frac{1}{24}, b = \frac{19}{96} \end{aligned}$$

Άρα μια ειδική λύση της αρχικής ανομοιογενούς εξίσωσης είναι η $y_c = -\frac{1}{6}e^t + (\frac{19}{96}t - \frac{1}{24}t^2)e^{2t}$. Επομένως η γενική λύση της ανομοιογενούς εξίσωσης είναι $y = y_{gen} + y_c$.

(ii) Η επιχειρηματολογία είναι παρόμοια. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι $r = 1, 2$, άρα η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι της μορφής $y = c_1e^t + c_2e^{2t}$. Εφόσον $\cos 2t, \sin 2t$ δεν είναι λύσεις της ομογενούς, η μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών δίνει ειδική λύση της μορφής $y_c = A \cos 2t + B \sin 2t$:

$$\begin{aligned} & (A \cos 2t + B \sin 2t)''' - 3(A \cos 2t + B \sin 2t)' + 2(A \cos 2t + B \sin 2t) \\ &= 8A \sin 2t - 8B \cos 2t + 6A \sin 2t - 6B \cos 2t + 2A \cos 2t + 2B \sin 2t \\ &= (14A + 2B) \sin 2t + (2A - 14B) \cos 2t \\ &\Rightarrow \begin{cases} 14A + 2B = 14 \\ 2A - 14B = -18 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{4}{5}, B = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Άρα έχουμε τη γενική λύση της ανομοιογενούς εξίσωσης $y = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{4}{5} \cos 2t + \frac{7}{5} \sin 2t$.

5 (i) Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι $r = 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Επομένως η γενική λύση της εξίσωσης ισούται $y = c_1e^t + c_2e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$. Για να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες, πρέπει

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 = 0 \\ c_1 - \frac{1}{2}c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_3 = 0, c_2 = \frac{2}{3}, c_1 = \frac{1}{3}$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι η $y = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$.

(ii) Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι $r = 0$ (πολλαπλότητα 2) και $r = -1$. Επομένως η γενική λύση της ομοιογενούς εξίσωσης ισούται με $y = c_1 + c_2t + c_3e^{-t}$. Από την μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών έχουμε ότι η ειδική λύση είναι της μορφής $at^2 + bt^3 + cte^{-t}$. Πράγματι,

$$(at^2 + bt^3 + cte^{-t})''' + (at^2 + bt^3 + cte^{-t})'' = 6b + 2a + 6bt + ce^{-t} \Rightarrow b = \frac{1}{6}, a = -\frac{1}{2}, c = 1$$

Άρα η γενική λύση της ανομοιογενούς εξίσωσης είναι της μορφής $y = c_1 + c_2t + c_3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + te^{-t}$. Για να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες πρέπει

$$\begin{aligned} & c_1 + c_3 = 1 \\ & c_2 - c_3 + 1 = 0 \\ & c_3 - 1 + 2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow c_3 = -1, c_1 = 2, c_2 = -2.$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ δίνεται από την $y = 2 - 2t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + e^{-t} + te^{-t}$.

6 Παρατηρούμε ότι $A^2 = B^2 = 0$. Επομένως

$$e^{At} = I_2 + At = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = I_2 + Bt = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{At}e^{Bt} = \begin{bmatrix} 1-t^2 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix} \neq e^{Bt}e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1-t^2 \end{bmatrix}.$$

7 Πρώτα βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζοντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{bmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-4+\lambda^2+3) + 5(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2+4)$$

Άρα έχουμε πίνακα απλής δομής με 3 διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. Λύνουμε για 3 γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Για την πραγματική ιδιοτιμή έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0, \quad u_1 = 3u_3, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η αντίστοιχη βασική λύση ισούται $\varphi_1(t) = e^{2t}\vec{u}$. Για τις μιγαδικές ιδιοτιμές αρκεί να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία για $\lambda_2 = 2i$:

$$\begin{bmatrix} 2-2i & -5 & 0 \\ 1 & -2-2i & -3 \\ 0 & 1 & 2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -(2-2i)v_3, \quad 5v_2 = (2-2i)v_1$$

Για $v_2 = 1$ έχουμε $v_1 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}i$, $v_3 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$. Κατόπιν υπολογίζουμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνάρτησης:

$$e^{2it}\vec{v} = (\cos 2t + i \sin 2t) \left(\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \cos 2t \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} - \sin 2t \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} + i \left(\cos 2t \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \cos 2t - \frac{5}{4} \sin 2t \\ \cos 2t \\ -\frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t \end{bmatrix}}_{\varphi_2(t)} + i \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \cos 2t + \frac{5}{4} \sin 2t \\ \sin 2t \\ -\frac{1}{4} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t \end{bmatrix}}_{\varphi_3(t)}$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι $\vec{y} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3$. Η ορίζουσα Wronski της βάσης λύσεων $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ισούται με

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3e^{2t} & \frac{5}{4} \cos 2t - \frac{5}{4} \sin 2t & \frac{5}{4} \cos 2t + \frac{5}{4} \sin 2t \\ 0 & \cos 2t & \sin 2t \\ e^{2t} & -\frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t & -\frac{1}{4} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t \end{vmatrix}$$

$$= -\cos 2t(2 \cos 2t + 2 \sin 2t)e^{2t} - \sin 2t(2 \sin 2t - 2 \cos 2t)e^{2t}$$

$$= -2e^{2t}$$

8 Το σύστημα γράφεται στην μορφή $\vec{y}' = A\vec{y}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα δίνονται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i$$

Για τη γενική λύση υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα: ($\lambda_1 = 1$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_3 = 0, u_1 = u_2, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και ($\lambda_2 = i$)

$$\begin{bmatrix} 1-i & 0 & -2 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 1 & -1 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = 0, v_1 = (1+i)v_3, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα η γενική λύση ισούται $\vec{y} = c_1 e^t \vec{u} + c_2 \operatorname{Re}(e^{it} \vec{v}) + c_3 \operatorname{Im}(e^{it} \vec{v})$, όπου

$$\operatorname{Re}(e^{it} \vec{v}) = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ 0 \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Im}(e^{it} \vec{v}) = \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix}$$

9 Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $1, -1$. Υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_1 = -2u_2, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = 0, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Η γενική λύση ισούται με

$$\vec{y} = c_1 e^t \vec{u} + c_2 e^{-t} \vec{v} = \begin{bmatrix} -2c_1 e^t \\ c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{bmatrix}$$

Οι αρχικές συνθήκες δίνουν $-2c_1 = 1, c_1 + c_2 = -1$, δηλ. $c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}$.